Partie 1.

(1) $\forall i \in [\![2, N-1]\!]$ on a $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$

Ainsi $$\sum_{k=2}^{i} \Delta_k = \sum_{k=2}^{i} T_k - T_{k-1}$$

$$\sum_{k=2}^{i} \Delta_k = T_i - T_1$$

En rappelant que $T_1 = \Delta_1$, on a

$$\boxed{T_i = \Delta_1 + \dots + \Delta_i = \sum_{k=1}^{i} \Delta_k .}$$

• Δ_i représente le temps (en nombre de coups) pour que la carte C_N passe de la position $N-i+1$ à la position $N-i$

(2) "Placer la carte du dessus à la fin du paquet" est une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $p = \frac{1}{N}$ (La nouvelle place est choisi uniformément dans $[\![1, N]\!]$.

$\Delta_1 = T_1$ représente le premier succès d'une épreuve de bernoulli répétée de façon indépendante

Donc $\boxed{\Delta_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{N}\right)}$.

(3) (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_i > n$ signifie que la carte C_N passe de la place $N-i+1$ à la place $N-i$ en plus de n insertions.

Or chaque insertion est indépendante et la probabilité que chaque insertion ne fasse pas remonter la carte est

$p_i = \frac{N-i}{N}$ (Faire une insertion parmi les $N-i$ premières cartes)

donc $\boxed{P(\Delta_i > n) = \left(\frac{N-i}{N}\right)^n}$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^k = \frac{(1-1/N)}{\cancel{(1-2/N)}} \times \frac{\cancel{(1-2/N)}}{\left((1-2/N)-(1-1/N)\right)} \times \left(1-\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)\right.$$

$$= -N\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1}\right)$$

$$= N\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1}-1\right)$$

(c) $$P(T_2=n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(D_1=k) \times P(D_2=n-k) \quad \text{(d'après (a))}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1} \times \frac{1}{N} \times \left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-k-1} \times \frac{2}{N}$$

$$= \frac{2}{N^2} \times \frac{1}{(1-1/N)} \times \sum_{k=1}^{n-1}(1-1/N)^k \times \frac{\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}}{(1-2/N)^k}$$

$$= \frac{2}{N^2} \times \frac{1}{(1-1/N)} \times \left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1} \times \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^k$$

$$= \frac{2}{N^2} \times \frac{1}{\cancel{1-1/N}} \times \left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1} \times N\left(\cancel{1-\frac{1}{N}}\right)\left(\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1}-1\right)$$

$$\boxed{P(T_2=n) = \frac{2}{N}\left(\left(1-1/N\right)^{n-1}-\left(1-2/N\right)^{n-1}\right)}$$

5) La carte insérée à T_1 sera au dessus de celle inséré à T_2 ssi celle insérée à T_2 est insérée en position N et pas $N-1$. On aura l'inverse dans l'autre cas.

Donc ces deux évènements ont la même probabilité

$$\boxed{p = \frac{1}{2}.}$$

Partie 2

(8) On a $T = T_{N-1} + 1$ et $T_{N-1} = \Delta_1 + \dots + \Delta_{N-1}$

Ainsi

$$E(T) = E(T_{N-1}) + 1$$
$$= \sum_{i=1}^{N-1} E(\Delta_i) + 1$$
$$= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N}{i} + 1$$
$$= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N}{i} + \frac{N}{N}$$
$$\boxed{E(T) = \sum_{i=1}^{N} \frac{N}{i} = N \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} = N H_N}$$

(9) (a) $\forall t \in [\![k, k+1]\!]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

D'après l'inégalité de la moyenne,

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}}$$

(b)(i) On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n)$
$$= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1)$$

Or pour $k = n$ dans l'inégalité 9(a)

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \iff \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$$
$$\iff \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \leq 0$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$$

Ainsi $\frac{E(T)}{N\ln(N)} = \frac{N H_N}{N \ln(N)} = \frac{H_N}{\ln(N)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$

$$\frac{E(T) - N\ln(N) - N\gamma}{N} = H_n - \ln(N) - \gamma = u_N - \gamma$$

et $\lim_{N \to +\infty} (u_n - \gamma) = 0$

(11) (a)

```
function Jeu2 = insertion(Jeu)
  Jeu2 = zeros(1,32)
  k = floor(32*rand()) + 1
  if k > 1 then
      for i = 1 : k-1
          Jeu2(i) = Jeu(i+1)
      end
  Jeu2(k) = Jeu(1)
  end
endfunction
```

(b) La fonction T simule un mélange complet du jeu de carte et donne le nombre d'insertion nécessaire pour y arriver. En d'autres termes il simule la VA. T

(c)

```
result = zeros(1,100)
for i = 1 : 100
    result(i) = T()
end
moyenne = sum(result)/100
disp(moyenne)
```

(3) $d(\mu_n, \pi) = \max \{ |\mu_n(A) - \pi(A)|, A \subset S_n \}$

Or comme $\forall A \subset S_n$, $0 \leq |\mu_n(A) - \pi(A)| \leq P(T > n)$

Le maximum est donc compris entre ces 2 quantités

$$0 \leq d(\mu_n, \pi) \leq P(T > n)$$

T étant une variable aléatoire, sa fonction de répartition tend vers 1 en $+\infty$.

$$P(T > n) = 1 - P(T \leq n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - 1 = 0$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} d(\mu_n, \pi) = 0}$$

Partie 4.

(1) Le premier jour, il reçoit forcément une lettre qu'il n'a pas encore. $p(S_1 = 1) = 1$

Il s'agit d'une $\boxed{\text{loi certaine}}$

(2) Pour S_k. On possède k timbre, chaque jour on a N-k chances sur N de trouver un timbre qu'on ne possède pas encore. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{N-k}{N}$

On cherche le premier jour où un tel timbre arrive.

$$S_k \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{N-k}{N}\right).$$

(3) $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n = S_n + S_{n-1} + \dots + S_1$

En identifiant Δ_1 et S_n, $\Delta_2 \sim S_{n-1}$ ...., $\Delta_n \sim 1$ qui ont la même loi, on conclut que

$\boxed{\text{S et T ont la même loi}}$

6 (a). On a d'après la partie III, et 5(b)

$$d(\mu_n, \pi) \leq P(T \geq n) \leq N e^{-\frac{n}{N}}$$

Or $\quad n > N\ln(N) + cN$

$$\Rightarrow \frac{n}{N} > \ln(N) + c$$

$$\Rightarrow -\frac{n}{N} < -\ln(N) - c$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{n}{N}} \leq e^{-\ln(N)-c}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{n}{N}} < \frac{1}{N} e^{-c}$$

$$\Rightarrow N e^{-n/N} < e^{-c}$$

Donc $\forall n > N\ln(N) + cN,$

$$\boxed{d(\mu_n, \pi) \leq e^{-c}}$$

(b) On souhaite que $d(\mu_n, \pi) \leq 0{,}2$

cela est le cas si $e^{-c} \leq 0{,}2 \Leftrightarrow -c \geq \ln(0{,}2)$

$$\Leftrightarrow c \leq \ln(5)$$

Ainsi

$$n > 32\ln(32) + 32\ln(5)$$

$$n \geq 162.$$

Le jeu sera suffisamment bien mélangé après 162 insertions.